Comment résoudre une équation du second degré
Discriminant négatif

On a appris, en classe de première, que le nombre de solutions ***réelles*** pour une *équation du second degré* (avec un trinôme donc) dépendait du signe du *discriminant* Δ.
Si le discriminant était *positif* (> 0) , alors l'équation du second degré avait *DEUX* solutions réelles.
Si le discriminant était *nul* ($= 0$) , alors l'équation du second degré avait *UNE* solution réelle.
Si le discriminant était *négatif* (< 0) , alors l'équation du second degré *n'avait pas* de solution réelle.

La grande "nouveauté" est de découvrir qu'il existe en fait des solutions lorsque le discriminant est négatif, MAIS que ces solutions sont alors des nombres complexes ! Attention, les formules de Première restent valables et donnent des solutions réelles tant que le discriminant est positif ou nul.

Propriété et formules

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

Si on a $\Delta < 0$, alors l'équation possède deux solutions complexes <u>et</u> conjuguées.

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Application

On veut résoudre l'équation $2z^2 - 4z + 3 = 0$ $\longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 3 = -8 < 0$.

Donc l'équation possède deux solutions complexes

$$z_1 = \frac{-(-4) + i\sqrt{8}}{2 \times 2} = \frac{4 + i\sqrt{8}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$z_2 = \frac{-(-4) - i\sqrt{8}}{2 \times 2} = \frac{4 - i\sqrt{8}}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

Conséquence : on constate effectivement que les deux solutions sont conjuguées.

Remarque

Il faudra garder un oeil sur l'environnement dans lequel on cherche les solutions !
Si le problème posé consiste à trouver une distance, et que l'on obtient un discriminant négatif, on ne pourra pas conclure avec une distance égale à un nombre complexe !