

Comment obtenir l'écriture trigonométrique d'un complexe

Avant de voir l'écriture exponentielle d'un nombre complexe, il est souvent demandé (et utile) de savoir travailler sur son *écriture trigonométrique*. Ces deux écritures sont assez similaires, car elles nécessitent de connaître le module et l'argument du nombre complexe.

L'écriture trigonométrique d'un nombre complexe z s'écrira :

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta), \text{ où } r \text{ est le module de } z \text{ et } \theta \text{ est son argument}$$

Pour obtenir cette écriture trigonométrique, il faudra respecter les deux étapes suivantes :

Etape 1 : on calcule le *module* du nombre complexe.

Etape 2 : on détermine la valeur de l'*argument*, en retrouvant l'angle à l'aide du cercle trigonométrique.

Exemple 1

On cherche l'écriture trigonométrique du nombre complexe $(3 - 3i)$

Etape 1 : on calcule le module de $3 - 3i$

$$\rightarrow \text{on a } |3 - 3i| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$$

Etape 2 : on cherche un argument θ de $3 - 3i$

$$\rightarrow \text{il vérifie } \cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{3}{\sqrt{18}} \text{ et } \sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{-3}{\sqrt{18}}$$

$$\text{On obtient : } \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ soit } \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{On a donc : } 3 - 3i = \sqrt{18} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

Exemple 2

On cherche l'écriture trigonométrique du nombre complexe $(-6 + \sqrt{12}i)$

Etape 1 : on calcule le module de $-6 + \sqrt{12}i$

$$\rightarrow \text{on a } |-6 + \sqrt{12}i| = \sqrt{(-6)^2 + (\sqrt{12})^2} = \sqrt{36 + 12} = \sqrt{48}$$

Etape 2 : on cherche un argument θ de $-6 + \sqrt{12}i$

$$\rightarrow \text{il vérifie } \cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{-6}{\sqrt{48}} \text{ et } \sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{48}}$$

$$\text{On obtient : } \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{1}{2} \text{ soit } \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{On a donc : } -6 + \sqrt{12}i = \sqrt{48} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$