Comment obtenir l'écriture exponentielle d'un nombre complexe

Après avoir vu, sur une fiche précédente, l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe, il est souvent plus utile de travailler avec son *écriture exponentielle*. Ces deux écritures restent très similaires, car elles nécessitent de connaitre le module et l'argument du nombre complexe.

L'écriture exponentielle d'un nombre complexe z s'écrira :
$z = r\,e^{i\theta}$ **, où r est le module de z et θ est son argument**

Pour obtenir cette écriture exponentielle, il faudra respecter les deux étapes suivantes :

Etape 1 : on calcule le *module* du nombre complexe.

Etape 2 : on détermine la valeur de l'*argument*, en retrouvant l'angle à l'aide du cercle trigonométrique.

Exemple 1 : on cherche l'écriture *exponentielle* du nombre complexe $(3 - 3i)$

Etape 1 : on calcule le module de $3-3i$

$\rightarrow$ on a $|3-3i| = \sqrt{3^2+(-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

Etape 2 : on cherche un argument θ de $3-3i$

$\rightarrow$ il vérifie $\cos\theta = \dfrac{Re(z)}{|z|} = \dfrac{3}{\sqrt{18}}$ et $\sin\theta = \dfrac{Im(z)}{|z|} = \dfrac{-3}{\sqrt{18}}$

On obtient : $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

On a donc : $3-3i = \sqrt{18}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Exemple 2 : on cherche l'écriture *exponentielle* du nombre complexe $(-6 + \sqrt{12}\,i)$

Etape 1 : on calcule le module de $-6+\sqrt{12}\,i$

$\rightarrow$ on a $|-6+\sqrt{12}\,i| = \sqrt{(-6)^2+(\sqrt{12})^2} = \sqrt{36+12} = \sqrt{48}$

Etape 2 : on cherche un argument θ de $-6+\sqrt{12}\,i$

$\rightarrow$ il vérifie $\cos\theta = \dfrac{Re(z)}{|z|} = \dfrac{-6}{\sqrt{48}}$ et $\sin\theta = \dfrac{Im(z)}{|z|} = \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{48}}$

On obtient : $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$, soit $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$

On a donc : $-6+\sqrt{12}\,i = \sqrt{48}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$