Comment montrer que deux vecteurs sont orthogonaux

Dans de très nombreux exercices du Bac concernant, au départ, les nombres complexes, on a besoin de *montrer que deux vecteurs (ou deux côtés) sont orthogonaux*. Cela pourra nous permettre de montrer qu'un triangle est rectangle, qu'un quadrilatère est un rectangle ou un carré.
La méthode de calcul utilisant les arguments est à faire au moins une fois (comme application du cours) mais elle est fastidieuse et peu efficace (il faudra montrer que l'argument final est égal à $\frac{\Pi}{2}$).
Du coup, même si l'exercice nous donne des affixes complexes, je vous conseille d'utiliser la formule du produit scalaire, apprise en Première, avec les coordonnées (c'est bien plus efficace !).

Exemple d'application

On nous donne trois nombres complexes $z_A = 5 + i$, $z_B = 8 - 3i$ et $z_C = 11 + 5{,}5\,i$ qui sont les affixes de trois points A, B et C
On va montrer que l'angle ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) est un angle droit (donc vecteurs orthogonaux).

En utilisant un calcul d'argument

On sait que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

or $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{11 + 5{,}5i - (5+i)}{8 - 3i - (5+i)} = \frac{6 + 4{,}5i}{3 - 4i}$ avec $i^2 = -1$

soit $\frac{(6+4{,}5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{18 + 24i + 13{,}5i + 18\boxed{i^2}}{9 + 12i - 12i - 16\boxed{i^2}} = \frac{37{,}5\,i}{25}$

Donc $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{37{,}5}{25}i \rightarrow$ c'est un imaginaire pur, qui a donc un argument égal à $\frac{\pi}{2}$.

Donc on a bien $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

En utilisant le produit scalaire

On écrit les coordonnées des points : $A\left|\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}8\\-3\end{matrix}\right.$ et $C\left|\begin{matrix}11\\5{,}5\end{matrix}\right.$

On calcule $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}8-5=3\\-3-1=-4\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix}11-5=6\\5{,}5-1=4{,}5\end{matrix}\right.$

On obtient $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3\times 6 + (-4)\times 4{,}5 = 18 - 18 = 0$

Donc on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$, soit $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.