Comment calculer une distance avec le module : application

Dans de très nombreux exercices du Bac concernant les nombres complexes, on a besoin de *calculer la distance entre deux points*. Cela nous permettra de montrer qu'un triangle est isocèle ou équilatéral, qu'un quadrilatère est un losange, ou que plusieurs points sont sur un même cercle (si leur distance par rapport au centre est la même) ....

Exemple d'application

On considère les points A , B et C du plan ayant pour affixes respectives :
$z_A = -2+2i$; $z_B = 1-3i$; $z_c = 3+5i$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

On calcule $AB = |z_B - z_A| = |1-3i-(-2+2i)|$

$\rightarrow AB = |3-5i| = \sqrt{3^2+(-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

On calcule $BC = |z_C - z_B| = |3+5i-(1-3i)|$

$\rightarrow BC = |2+8i| = \sqrt{2^2+8^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$

On calcule $AC = |z_C - z_A| = |3+5i-(-2+2i)|$

$\rightarrow AC = |5+3i| = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

Donc on a : $AB = AC$ → triangle isocèle en A

et $BC^2 = AC^2 + AB^2$ (car $\sqrt{68}^2 = \sqrt{34}^2 + \sqrt{34}^2$)

→ triangle rectangle en A

(réciproque de Pythagore !)

Donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

Remarque

Même si l'exercice nous donne des affixes complexes, nous pouvons utiliser la formule de la distance, apprise en Seconde, avec les coordonnées.
On obtientrait, bien sûr, le même résultat et les calculs se ressemblent d'ailleurs beaucoup !
Il faudra donc être très souple, et ne pas hésiter à passer d'un "environnement" à l'autre !!

Avec $z_A = -2+2i$, on a un point $A \left|\begin{matrix} -2 \\ 2 \end{matrix}\right.$

Avec $z_B = 1-3i$, on a un point $B \left|\begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}\right.$

On peut appliquer $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$\rightarrow AB = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{3^2+(-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$.