

Pourquoi $P(x = 4) = 0$ pour une loi continue

On va considérer ici une *loi uniforme* qui correspond à un temps d'attente compris entre 2h et 8h.

Si on demande spontanément à quelqu'un, " combien vaut $P(x = 4)$? ", il y a peu de chances qu'il réponde que cette probabilité soit égale à zéro !

En effet, si on reformule la question, on aboutira à une phrase du type " *quelle est la probabilité que le temps d'attente soit égale à 4 h ?* ".

Il peut être alors difficile pour quelqu'un d'affirmer que cette probabilité est nulle, car cette personne se dira qu'il est possible d'attendre 4 h !

Cela peut apparaître alors comme un petit paradoxe mais en fait, les mathématiques vont enlever toutes ambiguïtés !

Approche probabiliste

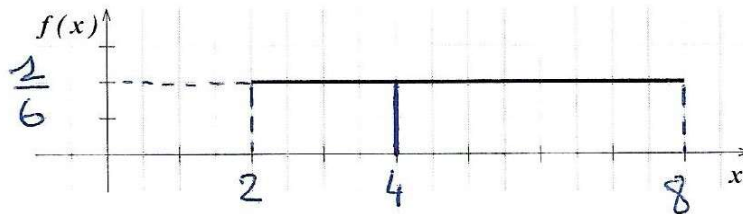
La probabilité cherchée $P(x = 4)$ correspond à UN temps d'attente.

Or, entre 2 h et 8 h, *puisque la loi est continue*, il y a une *infinité* de temps d'attente possible : 4h, mais aussi 4h1min, mais aussi 4h1sec, mais aussi 4h1dixième de seconde

On a donc $P(x = 4) = 0$, car on cherche la probabilité d'obtenir UN temps d'attente sur une INFINITE de temps d'attente possible !!

Approche graphique

Voici la représentation graphique de la densité de probabilité de cette loi uniforme.



Si on voulait déterminer la probabilité en utilisant une aire sous la courbe, alors on se retrouverait à calculer l'aire d'un simple segment. Donc cette aire est égale à 0 !

Conséquences

→ si la question est de " calculer la probabilité que le temps d'attente soit égal à 4 h "

on pourra écrire sans hésiter $P(x = 4) = 0$

→ on ne fera aucune différence entre les symboles " inférieur < " et " inférieur ou égal ≤ " .

Pour la seule fois dans votre vie des mathématiques, vous pouvez indifféremment utiliser soit l'un, soit l'autre, puisque la notion de "égal à" amène une probabilité nulle avec les lois continues.

Les probabilités suivantes sont donc toutes parfaitement égales !

$$\begin{aligned} \text{On a : } & P(3 < x < 5) \\ & = P(3 \leq x < 5) \\ & = P(3 < x \leq 5) \\ & = P(3 \leq x \leq 5) \end{aligned}$$