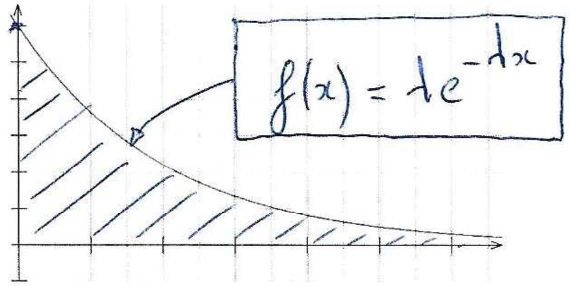
La loi exponentielle : définition , espérance

La loi exponentielle

La densité de probabilité d'une *loi exponentielle* sera une fonction définie sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, où λ est un réel *strictement positif.*
Ce nombre λ s'appelle le ***paramètre*** de la loi exponentielle.

Le paramètre λ correspond à l'ordonnée à l'origine $\rightarrow \lambda$



Vérification
Pour que f soit bien une densité de probabilité, il faut que son intégrale entre 0 et $+\infty$ soit égale à 1 .

On doit calculer $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

Pour cela, on calcule $\int_0^{a} f(x)\,dx$ et on fait tendre le nombre a vers $+\infty$.

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a = -e^{-\lambda a} - (-e^{-\lambda \times 0})$$

$-e^{-\lambda x}$ est une primitive de $\lambda e^{-\lambda x}$

$\lim\limits_{a \to +\infty} e^{-\lambda a} = 0$

$e^{-\lambda \times 0} = e^{-0} = 1$

$\rightarrow$ on a bien $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Espérance mathématique d'une loi exponentielle

L'*espérance mathématiques* E (x) d'une *loi exponentielle* définie entre 0 et $+\infty$ sera :

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

$\rightarrow$ si on connait $\lambda = 0{,}05$ alors on aura $E(x) = \dfrac{1}{0{,}05} = 20$

$\rightarrow$ si on connait $E(x) = 50$ alors on aura : $50 = \dfrac{1}{\lambda}$, c'est à dire $\lambda = \dfrac{1}{50} = 0{,}02$