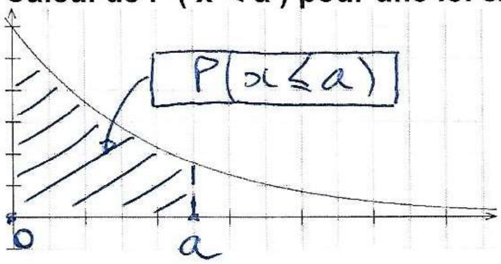
La loi exponentielle : comment calculer une probabilité

Préambule : il faut maitriser la formule suivante

Une *primitive* de $f\,(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ est égale à $F\,(x) = -\,e^{-\lambda x}$

Calcul de P (x ⩽ a) pour une loi exponentielle



$$P(x \leq a) = \int_0^a f(x)\,dx = F(a) - F(0)$$

$$\rightarrow P(x \leq a) = -e^{-\lambda a} - (-e^{-\lambda \times 0})$$

$$= -e^{-\lambda a} + 1$$

Conclusion : on aura P (x ⩽ a) = 1 - $e^{-\lambda a}$

Application : on calcule P ($x \leqslant 5$) pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}4$

→ on peut retrouver le résultat précédent en (re)calculant l'intégrale entre 0 et 5.

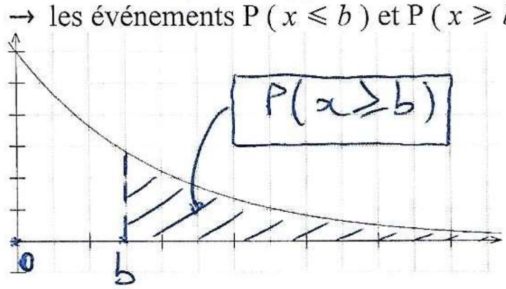
→ on peut apprendre et appliquer directement la formule.

En fait, je vous conseille de maitriser les deux façons de faire car on sera amené, suivant les consignes du Bac, à retrouver le résultat par intégration ou à appliquer directement la formule.

On a : $P(x \leq 5) = 1 - e^{-0{,}4 \times 5} = 1 - e^{-2} \approx 0{,}865$

Calcul de P (x ⩾ b) pour une loi exponentielle

→ les événements P ($x \leqslant b$) et P ($x \geqslant b$) sont des ***événements contraires***.



$$P(x \geq b) = 1 - P(x \leq b)$$

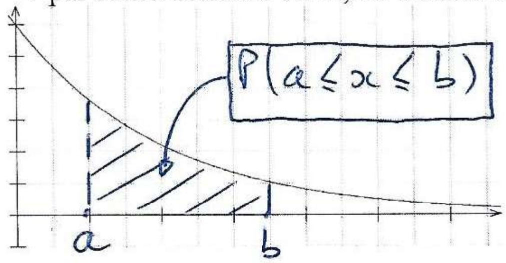
$$= 1 - (1 - e^{-\lambda b})$$

$$= e^{-\lambda b}$$

Conclusion : on aura P (x ⩾ *b*) = $e^{-\lambda b}$

Calcul de P (a ⩽ x ⩽ b) pour une loi exponentielle

→ par ***soustraction d'aires***, on obtient le résultat suivant : P ($a \leqslant x \leqslant b$) = P ($x \leqslant b$) - P ($x \leqslant a$)



$$P(a \leq x \leq b) = P(x \leq b) - P(x \leq a)$$

$$= 1 - e^{-\lambda b} - (1 - e^{-\lambda a})$$

$$= 1 - e^{-\lambda b} - 1 + e^{-\lambda a}$$

$$= e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Conclusion : on aura P (a ⩽ x ⩽ b) = $e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$