Limite de suite et théorème des gendarmes

Principe de base

SI on réussit à montrer qu'une suite (U_n) est, à partir d'un certain rang, *comprise entre* deux suites (V_n) et (W_n) , ***ET*** que l'on sait que les suites (V_n) et (W_n) converge *vers une même limite notée l* ,
ALORS on comprend très instinctivement que la suite (U_n) va également *converger vers cette limite l* .
En fait, la suite (U_n) est encadrée par deux suites qui "vont dans la même direction", comme un prisonnier amené à la prison en étant tenu par deux gendarmes !

Le théorème des gendarmes

Si on a $V_n \leq U_n \leq W_n$ à partir d'un certain rang avec $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} W_n = l$, alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$

Ce théorème sera souvent utilisé avec des suites utilisant *cos* (*n*) , *sin* (*n*) ou (- 1) ^{n} , car on aura, à chaque fois, un *encadrement* de ces termes.

En effet, pour tout *n* , on sait que : $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$; $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$; $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$

Exemples d'application

<u>Exemple 1</u> : on suppose $3 - \frac{1}{n^2} \leq U_n \leq 3 + \frac{1}{n^2}$, pour $n \geq 1$

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 - \frac{1}{n^2}\right) = 3$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{n^2}\right) = 3$

Donc, d'après le <u>théorème des gendarmes</u>, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 3$

<u>Exemple 2</u> : avec $U_n = \frac{2\cos n + 3}{n}$, pour $n \geq 1$

On a $-1 \leq \cos n \leq 1$

$\to \quad -2 \leq 2\cos n \leq 2$

$\to \quad 1 \leq 2\cos n + 3 \leq 5$

soit $\frac{1}{n} \leq \frac{2\cos n + 3}{n} \leq \frac{5}{n}$

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{n} = 0$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$