La propriété de linéarité des intégrales

Cette propriété va nous permettre de "*regrouper*" ou de "*séparer*" des intégrales utilisant des additions ou des soustractions (et des facteurs multiplicateurs). Mais, attention , on ne pourra pas de la même façon regrouper ou séparer des produits ou des quotients de deux fonctions !!

Enoncé de la propriété

Pour tous nombres réels α et β, on aura :

$$\alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$$

Attention : les bormes des intégrales doivent impérativement être les mêmes ici !

⚠ Par contre, écrire $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx$ serait complètement faux !

Application

On considère $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$

Pour calculer la somme $I_n + I_{n+1}$, on constate qu'on ne peut pas calculer séparément I_n , puis I_{n+1} (car on ne peut pas trouver en Terminale leur primitive respective).
On doit ici utiliser la propriété de linéarité pour regrouper les deux intégrales ensemble. Et heureusement, la fonction obtenue va se simplifier et on pourra alors déterminer sa primitive, et donc son intégrale.

On a : $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n \cancel{(1+x)}}{\cancel{1+x}}\,dx = \int_0^1 x^n\,dx$$

↳ on peut simplifier !

$$\rightarrow I_n + I_{n+1} = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$