Encadrement d'une intégrale : travail sur les inégalités

Les propriétés que l'on va voir dans cette fiche pourront se mémoriser comme une forme de conservation des inégalités par intégration .

Les trois propriétés à retenir

Si on a $f \geq 0$ sur $[b;c]$, alors $\int_b^c f(x)\,dx \geq 0$

Si on a $f \leq 0$ sur $[b;c]$, alors $\int_b^c f(x)\,dx \leq 0$

Si on a $f \leq g$ sur $[b;c]$, alors $\int_b^c f(x)\,dx \leq \int_b^c g(x)\,dx$

Attention , chaque réciproque est fausse ! Par exemple, une fonction peut avoir une intégrale positive sur un intervalle , sans pour autant être elle-même positive sur tout l'intervalle !!

Application : pour trouver le signe d'une intégrale

On considère ici une fonction f définie par $f(x) = x - 3$

Sur l'intervalle $[3;10]$, on a $f(x) \geq 0$

Donc on a $\int_3^{10} f(x)\,dx \geq 0$

Application : pour encadrer une intégrale

On considère ici une fonction g définie par $g(x) = \dfrac{3x+4}{(x+2)^2}$.

En faisant une étude des variations de la fonction, on vérifie que g est décroissante sur [0 ; 2] .

→ pour $0 \leq x \leq 2$

on obtient $g(2) \leq g(x) \leq g(0)$ $\boxed{\text{inversion de l'ordre}}$

soit $\frac{5}{8} \leq g(x) \leq 1$

On en déduit : $\underbrace{\int_0^2 \frac{5}{8}\,dx}_{\hookrightarrow \frac{5}{8}\times(2-0)=\frac{5}{4}} \leq \int_0^2 g(x)\,dx \leq \underbrace{\int_0^2 1\,dx}_{\hookrightarrow 1\times(2-0)=2}$

Conclusion : on a $\frac{5}{4} \leq \int_0^2 f(x)\,dx \leq 2$