Décomposition d'une fonction pour trouver une primitive
Identification termes à termes

Les *fractions rationnelles*, qui se présentent comme le quotient de deux fonctions polynômes, ne permettent pas, en général, de déterminer directement leurs primitives.
Il est alors nécessaire de décomposer ces fractions rationnelles en éléments simples, en utilisant une technique appelée *identification termes à termes*.

Méthode et exemple

On considère une fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+5x-1}{x+2}$, sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$

(*on peut constater que l'on ne sait pas trouver une primitive de cette fonction ....*)

Question 1 : Trouver les trois réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$

Question 2 : En déduire une primitive de f sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$

Question 1 : On va partir de l'expression $ax + b + \dfrac{c}{x+2}$, que l'on va mettre sous le même dénominateur. On pourra ainsi la comparer avec l'expression initiale $\dfrac{x^2+5x-1}{x+2}$,
en faisant une *identification termes à termes* (il y a correspondance entre les coefficients de x^2 , de x .....).

On aura : $ax + b + \dfrac{c}{x+2} = \dfrac{(ax+b)(x+2)}{x+2} + \dfrac{c}{x+2}$

$$= \frac{ax^2 + x(2a+b) + 2b + c}{x+2}$$

On identifie termes à termes avec $\dfrac{x^2+5x-1}{x+2}$

On obtient $\begin{cases} a = 1 \\ 2a+b = 5 \\ 2b+c = -1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -7 \end{cases}$

Question 2 : Avec la nouvelle forme de la fonction f, on peut déterminer toutes les primitives voulues !

On a donc : $f(x) = x + 3 - \dfrac{7}{x+2}$

$\longrightarrow F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 3x - 7\ln(x+2)$

pour tout $x \in \,]-2\,;+\infty[$