Comment passer à une loi centrée réduite
Pour encadrer une variable avec une probabilité donnée

On pourrait parler d'un "*changement de variable*" et la consigne suivante est à bien travailler.
On y sait qu'une variable suit une *loi normale* dont on connait l'espérance μ et l'écart type σ.
La probabilité voulue est donnée et on veut obtenir un encadrement pour la variable. On pourrait donc penser qu'il suffit d'utiliser la calculatrice SAUF QUE le résultat affiché n'aurait aucun rapport avec la réponse à apporter. On doit en fait passer à la ***loi centrée réduite*** pour "recentrer" les calculs.

Enoncé

On note x la variable aléatoire donnant la teneur en cacao, exprimée en pourcentage, d'une tablette de 100 g de chocolat commercialisable. On admet que x suit la loi normale d'espérance $\mu = 85$ et d'écart type $\sigma = 2$.

***Question* : Déterminer une valeur approchée au centième du réel a tel que :**

$$P(85 - a \leqslant x \leqslant 85 + a) = 0{,}9$$

Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Solution

On va travailler avec $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{x-85}{2}$ qui suit la loi normale centrée réduite.

→ on utilise "InvNorm" ou "FracNorm" sur la calculatrice, avec $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.

On obtient : $P(-1{,}645 \leq z \leq 1{,}645) = 0{,}9$

$$\rightarrow P\left(-1{,}645 \leq \frac{x-85}{2} \leq 1{,}645\right) = 0{,}9$$

$$\rightarrow P(-1{,}645 \times 2 \leq x - 85 \leq 1{,}645 \times 2) = 0{,}9$$

$$\rightarrow P(\underbrace{-1{,}645 \times 2}_{} + 85 \leq x \leq \underbrace{1{,}645 \times 2}_{} + 85) = 0{,}9$$

cela correspond à la valeur de $-a$

cela correspond à la valeur de a

On obtient donc : $a = 1{,}645 \times 2 = 3{,}29$

On vérifie que la variable x donne bien

$$P(85 - 3{,}29 \leq x \leq 85 + 3{,}29) = 0{,}9$$

soit $P(81{,}71 \leq x \leq 88{,}29) = 0{,}9$

Conséquence : ce résultat signifie que 90 % des tablettes commercialisées ont une teneur en cacao qui se situe autour de la moyenne entre 81,71 (soit 81,71 % de cacao) et 88,29 (soit 88,29 % de cacao).