Comment on lève des indéterminations avec les croissances comparées

Quand on se retrouve devant une *forme indéterminée*, il faut agir avec, en général, un calcul algébrique qui va permettre de remplacer l'écriture initiale par une autre écriture égale à la première, sauf qu'elle permettra , elle, de conclure pour la limite : on dit alors qu'on a *levé l'indétermination* !

Des exemples en utilisant les croissances comparées

D'une façon très schématique, on n'oubliera que le comportement de l'*exponentielle* l'emporte sur le comportement des *puissances de n* qui lui même l'emporte sur le comportement du *ln*.
Il est très souvent nécessaire de *factoriser* l'expression avant d'appliquer ces *croissances comparées*.

Exemple 1 : avec $U_n = n^2 - \ln n \rightarrow$ F.I du type $\infty - \infty$

Forme Indéterminée

On factorise : $n^2 - \ln n = n^2\left(1 - \boxed{\frac{\ln n}{n^2}}\right)$

tend vers 0 par croissances comparées

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ (limite du type $\infty \times (1-0)$)

Exemple 2 : avec $V_n = e^{-n} \times n^2 \rightarrow$ F.I du type $0 \times (+\infty)$

On a : $e^{-n} \times n^2 = \frac{1}{e^n} \times n^2 = \boxed{\frac{n^2}{e^n}}$

tend vers 0 par croissances comparées

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

Exemple 3 : avec $W_n = \frac{e^n - \ln n}{n^2} \rightarrow$ F.I du type $\frac{\infty - \infty}{\infty}$

On factorise : $\frac{e^n - \ln n}{n^2} = \frac{e^n\left(1 - \frac{\ln n}{e^n}\right)}{n^2} = \frac{e^n}{n^2}\left(1 - \frac{\ln n}{e^n}\right)$

Par croissances comparées : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^n}{n^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{e^n} = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = +\infty$ (limite du type $+\infty \times (1-0)$)