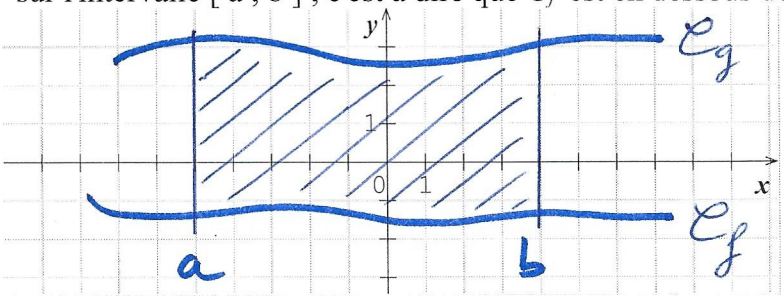
Comment calculer l'aire entre deux courbes

Au tout début du travail sur les intégrales, on a été amené à faire un lien entre cette notion d'intégrale et un aspect très concret, qui est l'*aire sous une courbe* (d'une fonction ***positive***).
En fait, on peut généraliser tout cela en s'intéressant à l'*aire entre deux courbes* quelconques (définies à partir de deux fonctions qui peuvent être positives ou négatives).

Définition de l'aire entre deux courbes avec une intégrale

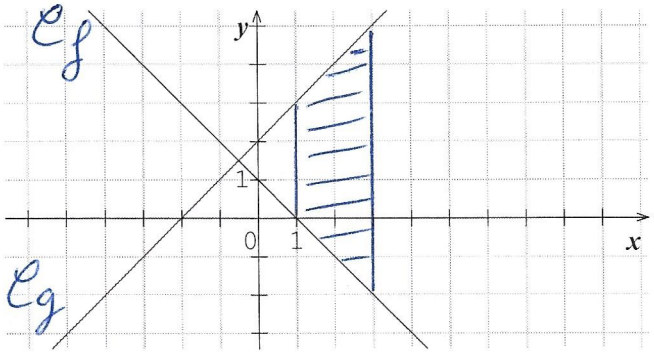
On considère deux fonctions f et g, avec leurs courbes représentatives C_f et C_g.
On suppose que $f \leqslant g$ sur l'intervalle [a ; b], c'est à dire que C_f est en dessous de C_g sur cet intervalle.



L'aire hachurée entre les deux courbes est égale à $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$

Un exemple (vérifiable) de calcul d'une aire entre deux courbes

On va travailler avec deux fonctions f et g définies par $f(x) = -x + 1$ et $g(x) = x + 2$. On va calculer l'aire entre les courbes C_f et C_g, délimitée par les droites verticales d'équations $x = 1$ et $x = 3$.



L'aire hachurée est égale à $\mathcal{A} = \int_1^3 (g(x) - f(x))\,dx$

On a donc : $\mathcal{A} = \int_1^3 (x + 2 - (-x + 1))\,dx$

soit $\mathcal{A} = \int_1^3 (2x + 1)\,dx = \left[x^2 + x\right]_1^3$

$\rightarrow \mathcal{A} = (3^2 + 3) - (1^2 + 1) = \boxed{10}$

→ Remarque : on peut vérifier, en comptant les carreaux, l'exactitude de ce résultat !!