Comment montrer qu'une suite est géométrique (2)

Nous allons voir ici un deuxième exemple *type Bac* pour lequel la méthode générale reste toujours la même, mais le travail sera rendu difficile par le calcul fractionnaire.

Enoncé

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \\ u_{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{2n+4}\right) u_n. \end{cases}$$

On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = (n+1)u_n$.

On va montrer que la suite *Vn* est géométrique et on en déduira une expression de *Vn* , puis de *Un* en fonction de *n*.

On écrit la formule (3) : $U_n = \dfrac{V_n}{n+1}$

→ on part de $V_{n+1} \underset{(2)}{=} (n+2)\,U_{n+1}$

on remplace $(n+1)$ par $(n+1+1)$!

→ $V_{n+1} \underset{(1)}{=} (n+2)\left(\dfrac{n+1}{2n+4}\right)U_n = \dfrac{\cancel{(n+2)}(n+1)}{2\cancel{(n+2)}}\,U_n$

→ $V_{n+1} = \dfrac{n+1}{2}\,U_n \underset{(3)}{=} \dfrac{\cancel{n+1}}{2} \times \dfrac{V_n}{\cancel{n+1}} = \dfrac{V_n}{2} = \dfrac{1}{2}V_n$

Donc $V_{n+1} = \dfrac{1}{2}V_n$ (avec $V_0 = (0+1)U_0 = 1$)

Conclusion pour la suite auxiliaire (V_n)

(V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = 1$

Utilisation de la formule des suites géométriques pour la suite (V_n)

On a $V_n = V_0 \times q^{(n-0)} \longrightarrow V_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On obtient donc la formule explicite pour la suite initiale (U_n)

On a $U_n = \dfrac{V_n}{n+1} \longrightarrow U_n = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n+1}$