Comment montrer qu'une suite est géométrique (1)

La fiche de Première sur les suites arithmético-géométriques doit être revue car elle donne le cadre général du travail concernant les suites auxiliaires et leur utilisation pour obtenir des suites géométriques. Nous allons voir ici un premier exemple *type Bac* pour lequel la méthode générale reste conforme à ce travail de Première mais il y aura une difficulté liée au mode de définition de la suite.

Enoncé

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n.$$

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5.$$

On va montrer que la suite *Vn* est géométrique et on en déduira une expression de *Vn* , puis de *Un* en fonction de *n*.

On écrit la formule (3) : $U_n = V_n - 2n^2 - 3n - 5$

→ on part de $V_{n+1} = U_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5$

(2) on remplace n par (n+1)

on obtient $V_{n+1} = U_{n+1} + \underbrace{2n^2 + 4n + 2 + 3n + 3 + 5}$

$= \boxed{2U_n + 2n^2 - n} \boxed{+ 2n^2 + 7n + 10}$

(1)

$= 2(V_n - 2n^2 - 3n - 5) + 2n^2 - n + 2n^2 + 7n + 10$

(3)

$= 2V_n - \cancel{4n^2} - \cancel{6n} - 10 + \cancel{2n^2} \cancel{- n} + \cancel{2n^2} + \cancel{7n} + 10$

Donc $V_{n+1} = 2V_n$ (avec $V_0 = U_0 + 2\times 0^2 + 3\times 0 + 5 = 7$)

Conclusion pour la suite auxiliaire (V_n)

(V_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $V_0 = 7$

Utilisation de la formule des suites géométriques pour la suite (V_n)

On a $V_n = V_0 \times q^{(n-0)}$ → $V_n = 7 \times (2^n)$

On obtient donc la formule explicite pour la suite initiale (U_n)

On a : $U_n = V_n - 2n^2 - 3n - 5$

→ $U_n = 7 \times (2^n) - 2n^2 - 3n - 5$